دورة الفصل الثاني 2016

* السؤال الثالث

$U = \{ A \in M_n(R) ; A^T = A \}$

اثبت أن U فضاء جزئي في الفضاء $M_n(R)$

الحل

① $O_n \in U \Rightarrow U \neq \Phi$, $\forall A, B \in U$, $(A-B)^T = A^T - B^T = A - B$

② $\forall \alpha \in R$, $\forall A \in U$ $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A \Rightarrow \alpha A \in U$

مما سبق نجد أن U فضاء جزئي في $M_n(R)$.

(طريقة ثانية)

① $[0] \in U \Rightarrow \Phi \neq U \subseteq M_n(R)$

$a_{ij} = a_{ji}$ $b_{ij} = b_{ji}$

$A - B = [a_{ij}] - [b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$

$(A-B)^T = [a_{ij} - b_{ij}]^T = [a_{ji} - b_{ji}]$

$= [a_{ij} - b_{ij}] \in U$

② $\forall \alpha \in R$, $A \in U \Rightarrow a_{ij} = a_{ji}$

$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = \alpha a_{ij}$

$(\alpha A)^T = (\alpha a_{ij})^T = (\alpha a_{ji}) = \alpha a_{ij} \in U$

$U \subset M_n(R)$

★ السؤال الثاني:

① أوجد $6\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z}$ ، $6\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z}$

② بيّن إذا كان هذا المثالي أوليًا أم أعظميًا

③ أثبت أن $\mathbb{Z}$ ليس حلقة ما عدا المثاليات الأولية غير التافهة فيه

الحل

③ إن تقاطع أي مثاليين أوليين في $\mathbb{Z}$ هو المثالي الجزئي المولد بالمضاعف المشترك الأصغر للعددين m و n إذا كان $m \neq 0, n \neq 0$ فإن

$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = s\mathbb{Z} \neq 0$ حيث

$s = l.c.m(m,n)$ نسمي مضاعف مشترك أصغر $\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$

★ السؤال الثالث:

① أثبت أن $g \circ f \in Hom_R(M, C)$

② أثبت أن $\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g)$

الحل:

①
$$g \circ f : M \to C$$
$$\forall \alpha, \beta \in R, \ \forall x, y \in M \ ; \ x \longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g \circ f)[\alpha x + \beta y] = g[f(\alpha x + \beta y)] = g[\alpha f(x) + \beta f(y)]$$
$$= \alpha\, g(f(x)) + \beta\, g(f(y))$$
$$= \alpha (g \circ f)(x) + \beta (g \circ f)(y)$$
$$\Rightarrow g \circ f \in Hom_R(M, C)$$

②
$$\forall a \in \ker(g \circ f) \Rightarrow (g \circ f)(a) = 0 \iff g(f(a)) = 0$$
$$f(a) \in \ker g \iff a \in f^{-1}(\ker g) \Rightarrow$$

$$\ker(g \circ f) = f^{-1}(\ker g)$$

* السؤال الرابع:

① أثبت أن المتتالية $0 \to U \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} (M/U) \to 0$ تامة:

② أثبت أن:

$f^{-1}(f(u)) = U + \ker f$ واستنتج أنه إذا كان

f متباين فإن $f^{-1}(f(u)) = u$

③ إذا كان M [illegible] f, [illegible]

الحل:

① تكون المتتالية تامة إذا كانت كل متتالية جزئية تامة، نلاحظ أن

$0 \to U \xrightarrow{i} M$ i متباين

$U \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/U$ $\operatorname{Im} i = \ker \pi$

$M \xrightarrow{\pi} M/U \to 0$ π غامر

∴ المتتالية تامة لأن كل متتالية جزئية تامة

② $\forall a \in f^{-1}(f(v)) \Rightarrow f(a) \in f(v) \Rightarrow \exists u \in v$

$f(a) = f(u)$

$\Rightarrow f(a-u) = 0 \Rightarrow a-u \in \ker f \Rightarrow \exists a' \in \ker f:$

$a' = a-u$

$a = a' + u \in v + \ker f \Rightarrow \boxed{f^{-1}(f(v)) \subseteq v + \ker f}$

$\forall u+k \in v+\ker f \Rightarrow f(u+k) = f(u) + f(k) = f(u) + 0$

$= f(u) \in f(v)$

$u \in v \quad , k \in \ker f$

ومنه $u+k \in f^{-1}(f(v))$

$\boxed{v + \ker f \subseteq f^{-1}(f(v))}$

∴

ملاحظة: [illegible]

إذا كان f متباين فإن $\ker f = \{0\}$ ومنه

$\ker f = v$

(3) إذا كان M بسيطاً فإنه أي مودول جزئي هو الصفر أو M نفسه أما أن $\ker \varphi$ مودول جزئي في M فإنه $\ker \varphi = \{0\}$ وهو يؤدي إلى أن φ متباين أو $\ker \varphi = M$ وهذا يؤدي إلى أن φ هو مورفيزم صفري.

Scanned by CamScanner